

Ondelettes orthogonales

Jules Berry

Table des matières

1	Introduction	2
2	Analyse multirésolution	2
3	Filtres d'échelle	4
4	Construction des bases d'ondelettes	6
5	Régularité des bases d'ondelettes	8
6	Quelques exemples de bases d'ondelettes	10
6.1	Ondelette de Haar	10
6.2	Ondelette de Shannon	10
6.3	Ondelette de Meyer	11
6.4	Ondelettes de Daubechies	12
7	Transformée en ondelettes rapide	14
8	Ondelettes sur l'intervalle	15
8.1	Symétrisation	15
8.2	Analyses multirésolution sur l'intervalle	15
9	Application à la méthode de Galerkin	16
	Références	18

1 Introduction

Les ondelettes s'inscrivent dans la lignée des outils introduits pour palier au manque de localisation de la transformée de Fourier. On sait en effet que la décroissance de la transformée de Fourier est intimement liée à la régularité de la fonction étudiée et la présence d'une irrégularité affectera l'ensemble de la transformée. On fait en général débiter la théorie moderne des ondelettes aux travaux de J. Morlet et A. Grossmann ([14]) en traitement du signal. Une étape essentielle a ensuite été franchie par Y. Meyer en introduisant la première base d'ondelette orthonormée([12]). Peu après S. Mallat démontre que la notion d'analyse multirésolution permet de systématiser la construction de bases d'ondelettes orthonormées([10]), y compris la base de Meyer. Dans ce document nous ne nous intéresserons qu'à ces bases d'ondelettes orthonormées issues d'analyses multirésolutions. Ces dernières sont particulièrement importantes car donnant lieu à des algorithmes de calcul particulièrement rapides.

Terminons cette introduction par quelques remarques concernant les notions. Dans ce document \mathcal{F} dénotera l'opérateur qui à une distribution tempérée f associe sa transformée de Fourier \hat{f} .

2 Analyse multirésolution

Définition 2.1 (Base de Riesz). Une famille $\{e_j\}$ est une base de Riesz pour un espace de Hilbert H si, et seulement si, elle vérifie

1. les combinaisons linéaires finies $\sum \beta_i e_i$ sont denses dans H ,
2. il existe deux constantes strictement positives A et B telles que pour toute suite finie (β_i) on ait

$$A \sum |\beta_i|^2 \leq \left\| \sum \beta_i e_i \right\|_H^2 \leq B \sum |\beta_i|^2$$

□

Définition 2.2 (Analyse multi-résolution). Une analyse multi-résolution est une famille de sous-espaces fermés $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie les propriétés suivantes

1. $V_j \subset V_{j+1}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$,
2. $f(\cdot) \in V_j$ si, et seulement si, $f(2\cdot) \in V_{j+1}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$,
3. on a $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
4. la réunion $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$,
5. il existe une fonction $g \in V_0$ telle que la famille $\{g(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz pour V_0 .

□

Remarque 2.1. Compte tenu du point 1 de la définition, les propriétés 3 et 4 sont respectivement équivalentes à $\lim_{j \rightarrow -\infty} P_{V_j} f = 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|f - P_{V_j} f\|_{L^2} = 0$ où l'on a noté P_{V_j} la projection de L^2 sur le sous-espace V_j . Les projections sont bien définies car les V_j sont supposés fermés.

Si on se donne une analyse multi-résolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ et une fonction $f \in V_0$ la relation

$$f(x) = \sum h_k g(x - k) \tag{1}$$

peut être ré-exprimée grâce à la transformée de Fourier et on obtient

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int \sum h_k g(x - k) e^{-i\xi x} dx = \int \sum h_k g(x) e^{-i\xi(x+k)} dx \\ &= \sum h_k e^{-i\xi k} \int g(x) e^{-i\xi x} dx = H(\xi) \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

où $H(\xi) = \sum h_k e^{-i\xi k}$ est une fonction 2π -périodique.

Alors en utilisant la formule de Plancherel $\|f\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-1} \|\hat{f}\|_{L^2}^2$ et le fait que $\|\sum h_k e^{-i\xi k}\|_{L^2(\mathbb{T})} = \sum |h_k|^2$ on est en mesure de traduire la seconde condition de la définition 2.1 d'une base de Riesz

$$A \sum |h_k|^2 \leq \left\| \sum h_k g(\cdot - k) \right\|_{L^2}^2 \leq B \sum |h_k|^2$$

dans le domaine de Fourier. Il suffit pour cela de remarquer que $\|f\|_{L^2}^2 = \left\| \sum h_k g(\cdot - k) \right\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \|H\hat{g}\|_{L^2}^2$ et

$$\begin{aligned} \|H\hat{g}\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |H(\xi)\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left| H(\xi) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{g}(\xi + 2m\pi) \chi_{[0, 2\pi[}(\xi) \right) \right|^2 d\xi \\ &= \int_0^{2\pi} |H(\xi)|^2 \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2m\pi)|^2 \right] d\xi. \end{aligned}$$

A ce stade nous avons montré que

$$A \|H\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq \int_0^{2\pi} |H(\xi)|^2 \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2m\pi)|^2 \right] d\xi \leq B \|H\|_{L^2(\mathbb{T})}^2. \quad (2)$$

Cet encadrement étant vrai pour toute fonction $H(\xi)$ dans $L^2(\mathbb{T})$, on peut en particulier choisir $H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{k=0}^N e^{ik\xi}$ et dans ce cas on a

$$|H(\xi)|^2 = H(\xi) \overline{H(\xi)} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^N (N+1-|k|) e^{ik\xi} = \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ik\xi} = K_N(\xi)$$

où $K_N(\xi)$ est le noyau de Fejér. En posant alors $\gamma(\xi) = \left| \sum \hat{g}(\xi + 2m\pi) \right|^2$, qui est une fonction de $L^1(\mathbb{T})$, on trouve l'encadrement

$$A \|K_N(\cdot - \xi_0)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq \int_0^{2\pi} K_N(\xi - \xi_0) \gamma(\xi) d\xi \leq B \|K_N(\cdot - \xi_0)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2.$$

Or $\int_0^{2\pi} K_N(\xi - \xi_0) \gamma(\xi) d\xi = K_N * \gamma(\xi_0)$ et on sait que dans ce cas on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} K_N * \gamma(\xi_0) = \gamma(\xi_0)$ pour presque tout $\xi_0 \in \mathbb{T}$ (voir par exemple [8], théorème I.2.11). On a donc montré

$$\tilde{A} \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi_0 + 2m\pi)|^2 \leq \tilde{B} \quad (3)$$

pour presque tout $\xi_0 \in \mathbb{T}$ où \tilde{A} et \tilde{B} sont des constantes strictement positives.

On cherche à présent à obtenir une base orthogonale du sous-espace V_0 . Pour cela supposons que l'on dispose d'une telle base $(\phi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$. La relation d'orthonormalité s'exprime alors par

$$\begin{aligned} \langle \phi(\cdot - k) | \phi(\cdot - l) \rangle_{L^2} &= \frac{1}{2\pi} \left\langle \hat{\phi}(\cdot - k) | \hat{\phi}(\cdot - l) \right\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik\xi} \hat{\phi}(\xi) \overline{e^{-il\xi} \hat{\phi}(\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left| \hat{\phi}(\xi) \right|^2 e^{i(l-k)\xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1} \left(\left| \hat{\phi} \right|^2 \right) (l - k) = \delta_{l-k}. \end{aligned}$$

On peut alors montrer via la formule de Poisson que la famille $(\phi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale si, et seulement si, on a la relation

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\xi + 2k\pi) \right|^2 = 1. \quad (4)$$

On exprime alors la fonction ϕ dans la base de Riesz $(g(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ du sous-espace V_0 et comme plus haut on trouve que $\hat{\phi}(\xi) = H(\xi)\hat{g}(\xi)$ où H est une fonction 2π -périodique. La relation (4) nous donne alors

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\xi + 2k\pi) \right|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(\xi + 2k\pi)|^2 |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 = |H(\xi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$$

et alors on a

$$H(\xi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 \right)^{-1/2}$$

cette quantité étant finie pour presque tout ξ d'après (3). De plus toujours en utilisant (3) on peut voir que $(\phi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de Riesz de V_0 . On a donc démontré le théorème ci-dessous.

Théorème 2.1. *Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution et g la fonction donnant la base de Riesz du sous-espace V_0 on définit alors la fonction d'échelle ϕ de l'analyse multirésolution par*

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{g}(\xi) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 \right)^{-1/2}.$$

Alors la famille $(\phi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée du sous-espace V_0 .

Définition 2.3. Une analyse multirésolution est dite r -régulière pour un entier naturel r si sa fonction d'échelle ϕ vérifie

- (i) ϕ est $r - 1$ fois continument dérivable,
- (ii) ϕ est r fois dérivable presque partout,
- (iii) pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha \leq r$ et tout $m \in \mathbb{N}$ on a

$$\int (1 + |x|)^m \left| \phi^{(\alpha)}(x) \right|^2 dx < +\infty.$$

□

Dans la suite on notera $\phi_{j,k}$ la fonction $x \mapsto 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$. En remarquant alors que

$$\langle \phi_{j,k} | \phi_{j,l} \rangle_{L^2} = 2^j \int \phi(2^j x - k) \overline{\phi(2^j x - l)} dx = \int \phi(x - k) \overline{\phi(x - l)} dx = \langle \phi_{0,k} | \phi_{0,l} \rangle_{L^2} = \delta_{l-k}.$$

Soit alors $f \in V_j$ d'après le point 2 de la définition 2.2 on a que $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$, on peut alors exprimer cette fonction dans la base $(\phi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ et en changeant de nouveau d'échelle on peut exprimer la fonction f dans la famille $(\phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$. On a donc montré que la famille $(\phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ était une base orthonormée pour le sous-espace V_j pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

3 Filtres d'échelle

Jusqu'ici nous nous avons considéré que nous disposions d'une analyse multirésolution pour déduire la fonction d'échelle. Dans la pratique il s'agit d'une situation peu vraisemblable. Nous allons à présent déterminer les conditions qui permettent de construire une analyse multirésolution, c'est-à-dire que l'on cherche à déterminer si une fonction ϕ donnée est une fonction d'échelle pour une analyse multirésolution.

On commence par remarquer que pour une analyse multi-résolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ on a $V_{-1} \subset V_0$ et en particulier $2^{-1/2} \phi(\cdot/2) \in V_0$. On peut alors exprimer cette fonction dans la base $\{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_0

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{\cdot}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(\cdot - k).$$

En prenant la transformée de Fourier des deux côtés on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \phi\left(\frac{x}{2}\right) e^{-i\xi x} dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int \alpha_k \phi(x-k) e^{-i\xi x} dx \\ \text{alors } \sqrt{2} \int \phi(x) e^{-2i\xi x} dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int \alpha_k \phi(x) e^{-i\xi(x+k)} dx \\ \text{donc } \hat{\phi}(2\xi) &= m_0(\xi) \hat{\phi}(\xi). \end{aligned}$$

Où l'on a noté $m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-1/2} \alpha_k e^{ik\xi}$. Ce que l'on peut réécrire

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2).$$

En itérant cette dernière forme et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{\phi}(2^{-n}\xi) = \hat{\phi}(0)$ on trouve

$$\hat{\phi}(\xi) = \left(\prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}\xi) \right) \hat{\phi}(0).$$

On commence par supposer que les fonctions m_0 et ϕ sont telles que ce produit est bien défini.

Proposition 3.1. *Soit ϕ une fonction d'échelle et m_0 comme ci-dessus. Alors on a*

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad (5)$$

$$\text{et } m_0(0) = 1. \quad (6)$$

Démonstration. On ne démontre que montre l'égalité (5). En utilisant la relation (4) on trouve

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(2(\xi + k\pi)) \right|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\xi + k\pi) \right|^2 |m_0(\xi + k\pi)|^2 \\ &= (|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\xi + k\pi) \right|^2 = |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2. \end{aligned}$$

Pour la seconde égalité se démontre en montrant d'abord que $\hat{\phi}(0) = 1$. La démonstration peut être trouvée dans [2]. ■

Le théorème donne les conditions nécessaires sur une fonction m_0 de sorte que ϕ définisse une analyse multi-résolution.

Théorème 3.1 (Mallat). *Si m_0 est une fonction 2π -périodique C^1 et vérifiant*

$$(i) \quad |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1,$$

$$(ii) \quad m_0(0) = 1,$$

$$(iii) \quad \inf_{\xi \in [-\pi/2, \pi/2]} |m_0(\xi)| > 0.$$

Alors

$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0(2^{-k}\xi)$$

défini une fonction d'échelle ϕ associée à une analyse multi-résolution. En particulier

$$V_j = \text{Vect} [\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}].$$

Démonstration. La démonstration de ce résultat est assez longue et technique, elle peut être trouvée dans [10] ou [9]. On se contente ici de commenter les hypothèses. On a vu plus haut que les hypothèses (i) et (ii) étaient nécessaires pour obtenir un analyse multirésolution. De plus ensembles la première garantit que $|m_0(\xi)| \leq 1$ et donc la convergence du produit. L'hypothèse (iii) est une condition suffisante pour l'orthogonalité de la famille engendrée par la fonction d'échelle. ■

La condition (iii) du théorème ci-dessus à été affaiblie par A. Cohen dans [1] pour obtenir le résultat ci-dessous.

Théorème 3.2 (Cohen). *Supposons que m_0 soit une fonction C^1 2π -périodique telle que $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$ et $m_0(0) = 1$. Supposons de plus qu'il existe un compact K de \mathbb{R} congru à $[-\pi, \pi]$ modulo 2π , c'est-à-dire que K est réunion finie d'intervalles et est tel que pour presque tout $\xi \in [-\pi, \pi]$ il existe $\omega \in K$ tel que $\xi - \omega \in 2\pi\mathbb{Z}$, contenant 0 et tel que pour tout $\xi \in K$ et tout entier $j > 0$ on ait $m_0(2^{-j}\xi) \neq 0$. Alors m_0 engendre une analyse multirésolution.*

Remarque 3.1. En considérant le compact $K = [-5\pi/2, -3\pi/2] \cup [-\pi/2, \pi/2] \cup [3\pi/2, 5\pi/2]$, dont on peut facilement vérifier qu'il est congru à $[-\pi, \pi]$ modulo 2π pour une fonction m_0 comme dans le théorème 3.2 on observe que ce dernier implique bien le théorème 3.1.

Enfin les filtre d'échelles sont intéressants pour caractériser le support de la fonction d'échelle et, comme nous le verrons plus loin, des ondelettes.

Théorème 3.3. *Soit $m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\xi}$ un filtre d'échelle et ϕ la fonction d'échelle associée. Alors la fonction ϕ est à support compact si, et seulement si, la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ n'admet qu'un nombre fini de termes non-nuls.*

Démonstration. Supposons pour commencer que ϕ soit à support compact, on peut en particulier supposer que son support est inclus dans $[-R, R]$ pour un réel strictement positif R . La relation $\alpha_k = 2^{-1/2} \int \phi(x/2)\overline{\phi(x-k)}dx$ implique que $\alpha_k = 0$ dès que $|k| > 3R$.

Réciproquement si on suppose que $m_0(\xi) = \sum_{k=N_1}^{N_2} \alpha_k e^{-ik\xi}$ où N_1 et N_2 sont deux entier. On va utiliser la relation $\hat{\phi}(\xi) = \prod_{j>0} m_0(2^{-j}\xi)$. On pose $T_j = \sum_{k=N_1}^{N_2} \alpha_k \delta_{2^{-j}k}$ pour tout $j > 0$, de sorte que $\mathcal{F}T_j = m_0(2^{-j}\cdot)$ au sens des distributions. On en déduit alors que $\hat{\phi} = \mathcal{F}(T)$ où l'on a posé $T = T_1 * T_2 * \dots$. Il suffit alors de voir que $\text{Supp } T \subset [\sum_{j>0} 2^{-j}N_1, \sum_{j>0} 2^{-j}N_2] = [N_1, N_2]$. ■

Remarque 3.2 (Algorithme en cascade). Les filtres d'échelle n'admettant qu'un nombre fini de coefficients non-nuls sont particulièrement intéressants d'un point de vue calculatoire. En effet en inversant la transformée de Fourier on peut voir que la relation $\hat{\phi}(\xi) = (\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\xi}) \hat{\phi}(\xi/2)$ devient $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(2x - k)$. Si on suppose alors que les α_k sont presque tous nuls, on obtient un algorithme (dit "en cascade") pour calculer une approximation de la fonction d'échelle. On part en effet de $\phi_0 = \chi_{[-1/2, 1/2]}$ et par récurrence $\phi_{n+1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi_n(2x - k)$. Cette construction a été introduite par I. Daubechies dans [5].

4 Construction des bases d'ondelettes

Nous sommes à présent en mesure d'introduire les bases orthonormées d'ondelettes. Comme on a $V_j \subset V_{j+1}$, on peut, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, considérer le complémentaire orthogonal W_j de V_j dans V_{j+1} , c'est-à-dire que $V_j \oplus^\perp W_j = V_{j+1}$. Supposons que l'on ait une fonction ψ de W_0 telle que la famille $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de W_0 . Alors par changement d'échelle

$$\psi_{j,n}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

la famille $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont des bases orthonormées de W_j pour chaque $j \in \mathbb{Z}$. De plus on note que $V_j \oplus^\perp W_j = V_{j+1} = (W_{j+1})^\perp \cap V_{j+2}$. On en déduit que les sous-espaces $(W_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ sont orthogonaux. Soit alors $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $f_j = P_{V_{j+1}}(f) - P_{V_j}(f) = P_{W_j}(f)$. D'après la remarque 2.1 on a que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j = f$. On a donc

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}}^\perp W_j.$$

On a donc finalement montré que la famille $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n)\in\mathbb{Z}^2}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ que l'on appelle base d'ondelettes. Il nous reste donc à voir comment obtenir la fonction ψ .

On rappelle que pour une analyse multi-résolution de fonction d'échelle ϕ , on a la relation

$$\hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi)$$

où m_0 est une fonction 2π -périodique telle que $m_0(0) = 1$ et $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$. On introduit alors la fonction

$$m_1(\xi) = e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)}.$$

Cette fonction est alors aussi une fonction 2π -périodique. On définit alors la fonction ψ comme étant la fonction définie par la relation

$$\hat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi)\hat{\phi}(\xi). \quad (7)$$

On montre à présent que la fonction ψ engendre un base orthonormée de W_0 .

Proposition 4.1. *La fonction ψ définie ci-dessus vérifie la relation*

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(\xi + 2l\pi) \right|^2 = 1. \quad (8)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(\xi + 2k\pi) \right|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |m_1(\xi/2 + k\pi)|^2 \left| \hat{\phi}(\xi/2 + k\pi) \right|^2 \\ &= (|m_1(\xi/2)|^2 + |m_1(\xi/2 + \pi)|^2) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\xi/2 + k\pi) \right|^2 \\ &= |m_0(\xi/2 + \pi)|^2 + |m_0(\xi/2)|^2 = 1 \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.1. ■

Proposition 4.2. *Soit ϕ une fonction d'échelle et ψ comme ci-dessus, pour tout $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ on a*

$$\langle \psi(\cdot - k) \mid \phi(\cdot - l) \rangle_{L^2} = 0.$$

En particulier on a

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \langle \psi(\cdot - k) \mid \phi(\cdot - l) \rangle_{L^2} &= \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}(\psi(\cdot - k)) \mid \mathcal{F}(\phi(\cdot - l)) \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{\psi}e^{-ik\cdot} \mid \hat{\phi}e^{-il\cdot} \rangle_{L^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi) \overline{\hat{\phi}(\xi)} e^{-i(k-l)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(\xi + 2m\pi) \overline{\hat{\phi}(\xi + 2m\pi)} \right) e^{-i(k-l)\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Or on a aussi

$$\begin{aligned} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(\xi + 2m\pi) \overline{\hat{\phi}(\xi + 2m\pi)} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} m_1(\xi/2 + m\pi) \hat{\phi}(\xi/2 + m\pi) \overline{m_0(\xi/2 + m\pi) \hat{\phi}(\xi/2 + m\pi)} \\ &= \left((m_1(\xi/2) + m_1(\xi/2 + \pi)) \left(\overline{m_0(\xi/2)} + \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \right) \right) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\xi/2 + m\pi) \right|^2. \end{aligned}$$

Or en développant les expressions de m_0 et m_1 on peut montrer que

$$(m_1(\xi/2) + m_1(\xi/2 + \pi)) \left(\overline{m_0(\xi/2)} + \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \right) = 0.$$

Ce qui montre le résultat. ■

On peut de alors voir que $\hat{\psi}(2\cdot) = \mathcal{F}(1/2\psi(\cdot/2))$ d'après la relation (7) on a alors que $\psi(\cdot/2) \in V_0$ et donc $\psi \in V_1$. De plus avec la proposition 4.2 on a que $\psi \in W_0$. On peut alors remarquer que

$$\begin{aligned} \langle \psi(\cdot - k) \mid \psi(\cdot - l) \rangle_{L^2} &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{\psi}(\cdot - k) \mid \hat{\psi}(\cdot - l) \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik\xi} \hat{\psi}(\xi) \overline{e^{-il\xi} \hat{\psi}(\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int |\hat{\psi}(\xi)|^2 e^{i(l-k)\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)\xi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2m\pi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)\xi} d\xi = \delta_{l-k} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la proposition 4.1 pour obtenir l'avant-dernière égalité. Ce qui montre que la famille $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de W_0 . On peut alors appliquer un argument de changement d'échelle pour obtenir le théorème ci-dessous.

Théorème 4.1. *Soit ψ la fonction définie par la relation (7). Pour tout $j, k \in \mathbb{Z}$ on note $\psi_{j,k}$ la fonction $x \mapsto 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$. Alors pour tout $j \in \mathbb{Z}$ la famille $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_j et de plus la famille $(\psi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.*

On peut alors exploiter la structure hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ pour définir la transformé en ondelettes.

Définition 4.1. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\psi_{j,k}$ une base orthonormale d'ondelettes. La transformée en ondelettes de f est donnée par

$$\mathcal{W}(f) = \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2} \langle f \mid \psi_{j,k} \rangle_{L^2} \psi_{j,k}$$

et on a de plus

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f \mid \psi_{j,k} \rangle_{L^2}|^2.$$

□

Remarque 4.1 (Algorithme en cascade). On reprend à présent le raisonnement mené dans la remarque 3.2. On commence par noter que $m_1(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k e^{-ik\xi}$ où $\beta_k = (-1)^k \alpha_{1-k}$ et en reprenant le même raisonnement que dans la remarque 3.2 et on obtient que $\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \phi(2x - k)$. Ceci permet d'étendre l'algorithme en cascade pour le calcul des ondelettes à support compact. De nouveau on renvoie à [5] pour plus de détails.

Proposition 4.3. *Soit ϕ une fonction d'échelle à support compact et $m_1 = \sum \beta_k e^{-ik\xi}$ le filtre d'échelle conjuguée. Alors la suite $(\beta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est à support compact. De plus l'ondelette ψ associée est aussi à support compact.*

Démonstration. On a vu au théorème 3.3 le fait que ϕ soit à support compact implique que la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est à support compact, en reprenant alors la remarque 4.1 il devient clair que la suite $(\beta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est aussi à support compact. De plus en interprétant la relation $\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \phi(2x - k)$ au sens des distributions on a $\psi(x) = (\sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \delta_k) * \phi(x)$. On peut alors utiliser le résultat habituel sur le support des convolution de distribution à support compact pour affirmer que ψ est à support compact. ■

5 Régularité des bases d'ondelettes

Les bases d'ondelettes construites à partir d'analyses multirésolution régulières sont particulièrement utiles. La proposition suivante fait le lien entre le régularité de l'analyse multirésolution et la base d'ondelettes.

Proposition 5.1 (Meyer). Soit ψ une ondelette construite à partir d'une analyse multi-résolution r -régulière. Alors pour $0 \leq n \leq r$ on a

$$\frac{d^n}{d\xi^n} \hat{\psi}(0) = (-i)^n \int x^n \psi(x) dx = 0.$$

On dit alors que ψ admet r moments nuls.

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que ψ soit r -fois dérivable en x_0 et telle que les $\psi(x_0), \psi'(x_0), \dots, \psi^{(r)}(x_0)$ sont tous non-nuls. En effet on peut montrer que $1/2\psi((x+1)/2) = \sum (-1)^k \alpha_k \phi(x-k)$, on peut alors en déduire que ψ hérite des propriétés de régularité de ϕ . Pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, on définit k_j comme étant l'entier tel que $2^{-j}k_j \leq x_0 \leq 2^{-j}(k_j+1)$. Pour $j > 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi | \psi_{j,k_j} \rangle_{L^2} = \langle \psi_{j,k_j} | \psi \rangle_{L^2} = \sqrt{2^j} \int \overline{\psi(x)} \psi(2^j x - k_j) dx \\ &= \sqrt{2^j} \int \left[\overline{\psi(x_0)} + (x - x_0) \overline{\psi'(x_0)} + \dots + (x - x_0)^r \frac{\overline{\psi^{(r)}(x_0)}}{r!} (1 + \alpha(x + x_0)) \right] \psi(2^j x - k_j) dx \end{aligned}$$

Où on a utilisé un développement de Taylor à l'ordre r de ψ en x_0 . Par le changement de variable $x \mapsto 2^{-j}x + x_0$, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= 2^j \overline{\psi(x_0)} \int \psi(x + 2^j x_0 - k_j) dx + 2^{-2^j} \overline{\psi'(x_0)} \int x \psi(x + 2^j x_0 - k_j) dx + \dots \\ &\quad + 2^{-(r+1)j} \frac{\overline{\psi^{(r)}(x_0)}}{r!} \int x^r (1 + \alpha(2^{-j}x)) \psi(x + 2^j x_0 - k_j) dx. \quad (9) \end{aligned}$$

Par construction on a $|2^j x_0 - k_j| \leq 1$ et comme de plus pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout n tel que $0 \leq n \leq r$ on a

$$\int (1 + |x|)^m |\psi(x)|^2 dx < +\infty.$$

les intégrales $\int x^n \psi(x + 2^j x_0 - k_j) dx$ sont uniformément bornées pour tous $0 \leq n \leq r$ et $j \in \mathbb{Z}$. On peut replacer x par $x - 2^j x_0 + k_j$, multiplier par 2^j et faire tendre $j \rightarrow +\infty$. Alors tous les termes de la somme (9) à l'exception du premier tendent vers 0. On a donc

$$0 = \overline{\psi(x_0)} = \int \psi(x) dx.$$

En multipliant cette fois par 2^{2j} on trouve $\int \psi'(x) dx = 0$. On peut itérer le processus pour montrer que toutes les intégrales sont nulles. Ce qui montre le résultat. ■

On peut aussi caractériser les moments nuls d'une ondelette par le filtre d'échelle qui lui est associée. En effet si on suppose que $\hat{\phi}$ appartient à l'espace de Sobolev H^r pour un entier r . Alors $\hat{\phi}$ admet r dérivées au sens faible dans L^2 . En supposant de plus que le filtre d'échelle m_0 soit lui aussi r fois dérivable, on peut alors appliquer la formule de Leibniz pour dériver r fois $\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi} m_0(\xi/2 + \pi) \hat{\phi}(\xi/2)$. Or on sait de plus que $\frac{d^n}{d\xi^n} \hat{\psi}(0) = (-i)^n \int x^n \psi(x) dx$. On voit alors qu'il suffit que m_0 et ses r premières dérivées s'annulent en π pour que ψ admette r moments nuls. En réalité en considérant la proposition 3.1 on peut facilement voir qu'un filtre d'échelle s'annule toujours en π . Il suffit donc de vérifier les dérivées. On résume le raisonnement que l'on vient de réaliser dans la proposition ci-dessous.

Proposition 5.2. Soit ψ une ondelette construite à partir d'une analyse multi-résolution de fonction d'échelle ϕ et de filtre d'échelle m_0 . Alors si $\hat{\phi}$ appartient à l'espace de Sobolev H^r et si les r premières dérivées de m_0 s'annulent en π , l'ondelette ψ admet r moments nuls.

Remarque 5.1. On peut trouver une réciproque de ce résultat dans [10].

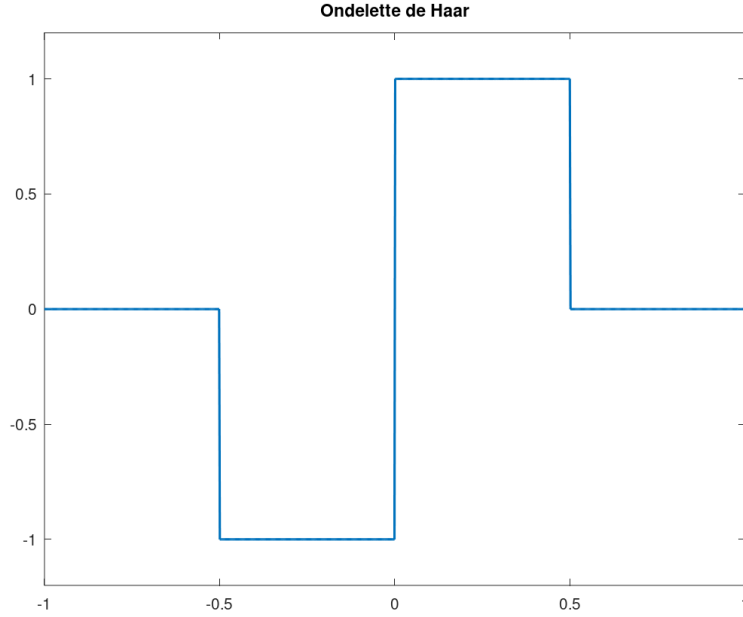


FIGURE 1 – Ondelette de Haar

6 Quelques exemples de bases d'ondelettes

6.1 Ondelette de Haar

Le système de Haar est bien antérieur à la notion d'ondelette([6]) il se révèle cependant très bien s'intégrer à la théorie et constitue même un exemple assez simple de base d'ondelettes que l'on peut obtenir à partir d'une analyse multirésolution. Son analyse multirésolution est donnée par la fonction d'échelle $\phi = \chi_{[0,1]}$. On a alors

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_0^1 e^{-i\xi t} dt = \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi}$$

Par suite

$$\hat{\phi}(2\xi) = \frac{1 - e^{-2i\xi}}{2i\xi} = \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \cdot \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} = m_0(\xi) \hat{\phi}(\xi).$$

On a donc le filtre d'échelle $m_0(\xi) = h_0 + h_{-1}e^{-i\xi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-i\xi}$. On en déduit l'expression du filtre conjugué $m_1(\xi) = e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)} = \frac{e^{-i\xi}}{2} - \frac{1}{2} = g_1 e^{-i\xi} + g_0$. D'après la relation $\frac{1}{2}\psi(x/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(x - k)$ on trouve

$$\frac{1}{2}\psi(x/2) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2}\phi(x - 1).$$

On trouve finalement l'expression de l'ondelette de Haar

$$\psi(x) = \chi_{[0,1/2]}(x) - \chi_{[-1/2,0]}(x). \quad (10)$$

6.2 Ondelette de Shannon

Cet exemple est en quelque sorte le dual du système de Haar, au lieu d'être bien localisée en temps l'ondelette est bien localisée en fréquence. L'ondelette de Shannon est obtenue à partir de l'analyse multirésolution de Shannon donnée par la fonction d'échelle définie par $\hat{\phi}(\xi) = \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)$ c'est-à-dire que $\phi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, c'est la fonction qui intervient dans le théorème de Shannon-Whittaker. La relation

$\hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ donne que $m_0(\xi) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(\xi)$ pour $\xi \in [-\pi, \pi]$. Comme il faut que le filtre d'échelle soit une fonction 2π -périodique on a $m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(\xi - 2k\pi)$. Par suite on a

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\xi) &= e^{i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \hat{\phi}(\xi/2) = e^{-i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \chi_{[-2\pi, 2\pi]}(\xi) \\ &= e^{-i\xi/2} (\chi_{[-2\pi, -\pi]}(\xi) + \chi_{[\pi, 2\pi]}(\xi)).\end{aligned}$$

En inversant la transformée de Fourier on trouve l'expression de l'ondelette de Shannon

$$\psi(\xi) = \frac{\sin(2\pi(\xi - 1/2)) - \sin(\pi(\xi - 1/2))}{\pi(\xi - 1/2)}. \quad (11)$$

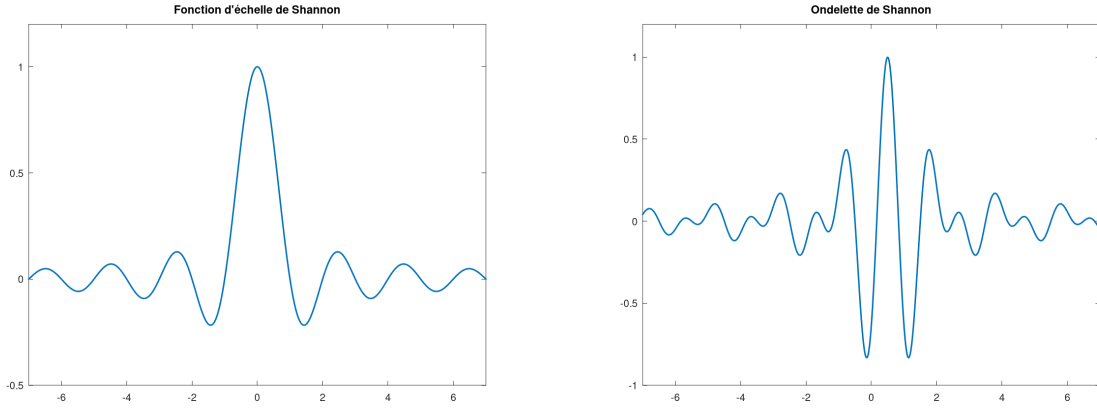


FIGURE 2 – Ondelette de Shannon

6.3 Ondelette de Meyer

Il s'agit ici plutôt d'une famille d'ondelettes. Il s'agit du premier exemple de base d'ondelettes orthogonales, introduite par Y. Meyer en 1987 ([12]) sans le cadre des analyses multirésolution. Cette fois-ci on commence par définir le filtre d'échelle. On pose m_0 la fonction 2π -périodique définie par

$$m_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in [-\pi/3, \pi/3], \\ 0 & \text{si } |\xi| \in [2\pi/3, \pi] \end{cases} \quad (12)$$

enfin les valeurs de m_0 pour $|\xi| \in [\pi/3, 2\pi/3]$, notre but étant de construire une analyse multirésolution on souhaite faire en sorte que ces valeurs soient compatibles avec au moins le théorème 3.2. Un manière de procéder est de choisir

$$m_0(\xi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}P\left(\frac{3|\xi|}{\pi} - 1\right)\right), \quad |\xi| \in [\pi/3, 2\pi/3]$$

où P est une fonction qui va de 0 à 1 sur l'intervalle $[0, 1]$, typiquement un polynôme, et telle que $P(x) + P(1 - x) = 1$. On vérifie facilement que l'on a $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$ pour que $|\xi| \notin [\pi/3, 2\pi/3]$ on a

$$\begin{aligned}|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 &= \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}P\left(\frac{3|\xi|}{\pi} - 1\right)\right)\right|^2 + \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}P\left(\frac{3|\xi + \pi|}{\pi} - 1\right)\right)\right|^2 \\ &= \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}P\left(\frac{-3|\xi|}{\pi}\right)\right)\right|^2 + \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}P\left(\frac{-3|\xi|}{\pi}\right)\right)\right|^2 = 1\end{aligned}$$

ce qui montre que m_0 vérifie les hypothèses du théorème 3.1. On a alors la fonction d'échelle

$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}\xi).$$

On peut montrer que ϕ vérifie

$$\hat{\phi}(\xi) = \begin{cases} m_0(\xi/2) & \text{si } |\xi| \leq 4\pi/3, \\ 0 & \text{si } |\xi| > 4\pi/3. \end{cases}$$

Finalement on obtient l'ondelette ψ par la formule habituelle et on peut de plus montrer que celle-ci vérifie

$$\hat{\psi}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi| \leq 2\pi/3, \\ m_1(\xi/2) & \text{si } |\xi| \in [2\pi/3, 4\pi/3], \\ e^{-i\xi/2}m_0(\xi/4) & \text{si } |\xi| \in [4\pi/3, 8\pi/3], \\ 0 & \text{si } |\xi| > 8\pi/3. \end{cases}$$

Un choix possible pour la fonction P est le polynôme $P(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$.

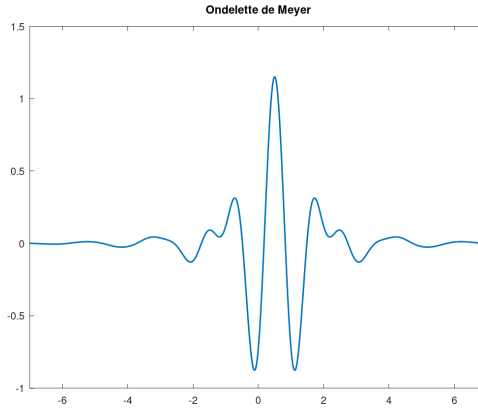


FIGURE 3 – Ondelette de Meyer

6.4 Ondelettes de Daubechies

Les ondelettes de Daubechies sont une famille de bases d'ondelettes à support compact, de support minimal, et de régularité arbitrairement élevée, elles ont été introduites par I. Daubechies dans [5].

De nouveau on construit l'analyse multirésolution à partir d'un filtre d'échelle qui vérifie les hypothèses du théorème 3.1. On sait déjà d'après le théorème 3.3 que le polynôme trigonométrique qui définit m_0 doit avoir qu'un nombre fini de coefficients non-nuls. On fait de plus l'hypothèse que m_0 peut s'écrire $m_0(\xi) = (1/2(1+e^{i\xi}))^N Q(e^{i\xi})$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$. On a alors $|m_0(e^{i\xi})|^2 = (\cos^2(\xi/2))^N |Q(e^{i\xi})|^2$ et comme Q est à coefficients réels on a que $\overline{Q(e^{i\xi})} = Q(e^{-i\xi})$ et on voit alors que

$$|Q(e^{i\xi})|^2 = \left(\sum_{k=0}^M \alpha_k e^{ik\xi} \right) \left(\sum_{k=0}^M \alpha_j e^{-ik\xi} \right) = \sum_{k=0}^M \beta_k (e^{ik\xi} + e^{-ik\xi}) = \sum_{k=0}^M 2\beta_k \cos(m\xi)$$

et par linéarisation de $\cos^n(\xi)$ on peut voir que $|Q(e^{i\xi})|^2$ peut s'écrire comme un polynôme en $\cos(\xi)$ à coefficients réels, ce qui est équivalent à l'écrire sous la forme d'un polynôme en $1/4 + \cos(\xi)/2 =$

$\sin^2(\xi/2)$. On a donc $|m_0(e^{i\xi})|^2 = (\cos^2(\xi/2))^N P(\sin^2(\xi/2)) = (1 - \sin^2(\xi/2))^N P(\sin^2(\xi/2))$. Comme de plus $\sin^2(\frac{\xi+\pi}{2}) = \cos^2(\frac{\xi}{2})$, la relation $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$ s'écrit

$$(1 - \theta)^N P(\theta) + \theta^N P(1 - \theta) = 1 \quad (13)$$

où l'on a noté $\theta = \sin^2(\xi/2)$. Le filtre d'échelle m_0 est uniquement déterminé par le polynôme P , ce dernier devant de plus vérifier $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. On a alors le lemme ci-dessous.

Lemme 6.1 (Riesz). *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\cos(\xi)) = |Q(e^{i\xi})|^2$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. On va montrer que l'on peut trouver deux polynômes $Q_1, P_1 \in \mathbb{R}[X]$ avec $P(\cos(\xi)) = |Q_1(e^{-i\xi})|^2 P_1(\cos(\xi))$ et tels que $\deg P_1 < \deg P$. Soit $N = \deg P$, on peut toujours écrire $P(\cos(\xi)) = e^{iN\xi} \tilde{P}(e^{-i\xi})$. Alors si $z_0 \in \mathbb{C}$ est une racine non-nulle de \tilde{P} , comme P est un polynôme à coefficients réels on a toujours $\tilde{P}(\bar{z}) = \tilde{P}(z)$, on en déduit que \bar{z}_0 est aussi une racine de \tilde{P} . De plus en notant $P(\cos(\xi)) = f(e^{-i\xi})$ on a que f et $e^{iN \cdot} \tilde{P}$ ont les mêmes zéros sur le cercle unité et c'est donc aussi le cas sur le plan complexe d'après le principe de zéros isolés. On en déduit en particulier que si z_0 est une racine de \tilde{P} alors $1/z_0$ et $1/\bar{z}_0$ en sont aussi. Finalement on peut écrire

$$\tilde{P}(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0)(1 - z z_0)(1 - z \bar{z}_0) \tilde{R}(z)$$

et alors

$$e^{iN\xi} \tilde{P}(e^{-i\xi}) = e^{i(N-2)\xi} \left| (e^{-i\xi} - z_0)(e^{-i\xi} - \bar{z}_0) \right|^2 \tilde{R}(e^{-i\xi})$$

on a que $P(\cos(\xi)) = |Q_1(e^{-i\xi})|^2 P_1(\cos(\xi))$ où $Q(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ et $P_1(\cos(\xi)) = e^{i(N-1)\xi} \tilde{R}(e^{i\xi})$. On peut alors réaliser le même raisonnement sur le P_1 . Finalement on obtient le polynôme

$$Q(z) = \sqrt{a_N} \prod_{i=1}^{N_1} (z - z_i)(z - \bar{z}_i) \prod_{i=1}^{N_2} (z - r_i) \quad (14)$$

où a_N est le coefficients de plus haut degrés, N_1 le nombre de racines complexes modulo la conjugaison et N_2 le nombre de racines réelles. ■

Remarque 6.1. La démonstration lemme 6.1 est constructive est permet de déterminer explicitement le polynôme Q .

On peut ensuite montrer ([5]) que le polynômes $P_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} x^k$ est solution de (13) et de plus $P_N(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. On peut alors appliquer le lemme 6.1 au polynôme $P(\sin^2(\xi/2)) = P\left(\frac{2-2\cos(\xi)}{4}\right)$ et il existe donc un polynôme Q tel que $|Q(e^{i\xi})|^2 = P_N(\sin^2(\xi/2))$.

On a alors que $m_N(\xi) = \left(\frac{1}{2}(1 + e^{i\xi})\right)^N Q(e^{i\xi})$ vérifie les hypothèses du théorème 3.1, ce qui nous permet d'en déduire une fonction d'échelle et une base d'ondelette à supports compacts. De plus en dérivant m_N on observe que ses $N - 1$ premières dérivées admettent un zéro en π et alors, d'après la proposition 5.2, l'ondelette associée admet alors $N - 1$ moments nuls. La construction du polyôme Q donnée dans la démonstration du lemme 6.1 permet de plus de déterminer les coefficients $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, presque tous nuls, du filtre d'échelle m_N . On en trouvera les valeurs numériques approchées pour $N = 2, \dots, 10$ dans [5]. On résume le résultat du raisonnement que nous avons mené dans le théorème ci-dessous.

Théorème 6.1 (Daubechies). *Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ il existe un filtre d'échelle m_N qui engendre une fonction d'échelle ϕ_N dont le support compact, inclus dans $[0, 2N - 1]$, et telle que l'ondelette ψ_N qui lui est associée est elle aussi de support compact, inclus dans $[-N + 1, N]$, et admettant $N - 1$ moments nuls.*

Remarque 6.2. En plus de ce que nous avons déjà évoqué dans le théorème 6.1, I. Daubechies montre dans [5] que les supports de la fonction ψ_N est minimal parmi les ondelettes à support compact admettant $N - 1$ moments nuls.

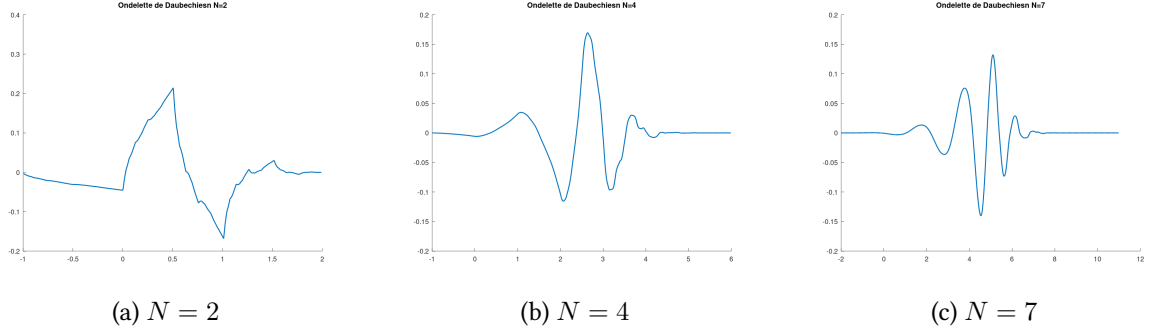


FIGURE 4 – Ondelettes de Daubechies

7 Transformée en ondelettes rapide

La transformée en ondelettes rapide est un algorithme introduit par S. Mallat pour réaliser le calcul numérique de la transformée en ondelettes. Comme dans le cas de l'algorithme en cascade pour le calcul numérique de la fonction d'échelle (3.2, 4.1) on part des expressions

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(2x - k), \quad (15)$$

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \psi(2x - k), \quad (16)$$

où l'on a $m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\xi}$ et $m_1(\xi) = e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k e^{-ik\xi}$.

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ on note $a_{j,n} = \langle f | \phi_{j,n} \rangle_{L^2}$ et $d_{j,n} = \langle f | \psi_{j,n} \rangle_{L^2}$. On peut alors introduire les relations (15) et (16) dans le calcul de ces quantités et on trouve

$$\begin{aligned} a_{j,n} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-1/2} \alpha_k \langle f | \phi_{j+1,2n+k} \rangle_{L^2} = 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-2n} \langle f | \phi_{j+1,k} \rangle_{L^2} \\ &= 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-2n} a_{j+1,k} = 2^{-1/2} \alpha * a_{j+1}[2n], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{j,n} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-1/2} \beta_k \langle f | \phi_{j+1,2n+k} \rangle_{L^2} = 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{k-2n} \langle f | \phi_{j+1,k} \rangle_{L^2} \\ &= 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{k-2n} a_{j+1,k} = 2^{-1/2} \beta * a_{j+1}[2n]. \end{aligned}$$

On est donc en mesure en partant d'une échelle J de calculer les coefficients des échelles plus grossières $j < J$ en réalisant une successions de sous-échantillonnages et convolutions.

Pour la reconstruction on exploite le fait que $V_{j+1} = V_j \oplus^\perp W_j$, on a en effet

$$\phi_{j+1,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j+1,n} | \phi_{j,k} \rangle_{L^2} \phi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j+1,n} | \psi_{j,k} \rangle_{L^2} \psi_{j,k}.$$

En utilisant de nouveau les relations (15) et (16) et l'orthonormalité de la famille $(\phi_{j+1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ on trouve que

$$\phi_{j+1,n} = 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-2k} \phi_{j,k} + 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{n-2k} \psi_{j,k}$$

ce que l'on peut réinterpréter par

$$a_{j+1,n} = 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-2k} a_{j,k} + 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{n-2k} d_{j,k}.$$

Pour ce qui est de l'initialisation de l'algorithme on suppose que l'on dispose d'une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui représente le signal que l'on souhaite décomposer que l'on suppose être la discrétisation d'un signal continu avec un pas $N = 2^{-J}$. En supposant $(\gamma_n) \in l^2(\mathbb{Z})$ on peut alors considérer la fonction

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n \phi_{J,n}$$

et on a alors $f \in V_J$. En reprenant les notations que l'on a introduit plus haut on a alors $\gamma_n = 2^J a_{J,n}$, ce qui nous permet alors d'appliquer la décomposition que nous avons présenté plus haut.

8 Ondelettes sur l'intervalle

Pour pouvoir appliquer la théorie des ondelettes à des situations concrètes il est important de pouvoir l'appliquer à des fonctions définies sur des intervalles bornés. Les manières les plus naturelles de réaliser cet objectif sont soit de prolonger la fonction sur \mathbb{R} par zéro, soit de périodiser la fonction. Cependant dans les deux cas la fonction définie sur \mathbb{R} que l'on obtient est en général discontinue, ce qui entraîne de grandes valeurs des coefficients d'ondelettes au niveau de celles-ci. Nous allons ici présenter deux autres méthodes qui sont plus satisfaisantes. La première consiste à symétriser la fonction à analyser avant de la périodiser, ce qui permet d'obtenir une fonction continue. La seconde est plus technique, le but est de construire une famille ϕ_k des fonctions indépendantes sur l'intervalle et de définir V_0 le sous-espace qu'elles engendrent. L'objectif est alors de faire en sorte de reproduire sur l'intervalle les propriétés principales des analyses multirésolution sur \mathbb{R} . Dans les deux cas on se contente ici de présenter les grandes lignes des constructions pour lesquelles on pourra trouver un traitement plus complet dans [4].

8.1 Symétrisation

Soit $f \in L^2([0, 1])$, pour pouvoir réaliser l'analyse en ondelettes de cette fonction nous allons construire une fonction \tilde{f} définie sur \mathbb{R} telle que $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ et telle que \tilde{f} soit continue en 0 et en 1. Pour cela il suffit de poser $g(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in [0, 1], \\ f(-x) & \forall x \in [-1, 0] \end{cases}$ et il suffit alors de définir \tilde{f} comme la périodisée de g . On note cependant que cette construction nous demande de calculer des intégrales sur \mathbb{R} , ce qui pose problème d'un point de vue numérique. Il nous faut donc reprendre l'idée de la construction depuis un point de vue différent.

Nous allons supposer que l'on dispose d'une ondelette ψ qui décroît suffisamment rapidement. On pose alors $\tilde{\psi}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\psi(x - 2n) + \psi(2n - x))$ pour tout $x \in [0, 1]$. On peut alors observer que

$$\int_0^1 f(x) \tilde{\psi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) \psi(x) dx. \quad (17)$$

Cette méthode présente l'avantage de ne pas introduire de discontinuités supplémentaires mais on ne peut pas en général garantir que ce soit le cas pour les dérivées. Les raccords seront donc toujours associés à des coefficients d'ondelette artificiellement grands au niveau des bords de l'intervalle. Cette méthode est cependant en général suffisante pour les applications en traitement du signal par exemple. On trouvera un traitement plus complet dans [10] et [4].

8.2 Analyses multirésolution sur l'intervalle

On présente les grandes lignes de la construction proposée par Cohen, Daubechies et Vial dans [4] telle que présentée dans [3]. On part d'une fonction d'échelle de Daubechies ϕ de support $[0, L]$ et on suppose de plus que la base orthonormée associée à ϕ engendre les polynômes de degrés inférieur à N . On fixe alors deux entiers $M_1 \geq 0$ et $M_2 \geq L$ et j suffisamment grand pour que l'on ait $2^{-j}(M_1 + M_2 +$

$2L) \leq 1$. Sous ces hypothèses le support des fonctions $\phi_{j,k}$ pour $M_1 \leq k \leq 2^j - M_2$ est contenu dans $[0, 1]$. On souhaite à présent compléter la base de sorte à pouvoir engendrer les polynômes de degrés inférieur à N sur $[0, 1]$. Pour cela on définit les fonctions de bord

$$\phi_{j,p}^0 = 2^{j(1/2-p)} \sum_{k < M_1} \langle (\cdot)^p \mid \phi_j, k \rangle_{L^2} \phi_{j,k}$$

et

$$\phi_{j,p}^1 = 2^{j(1/2-p)} \sum_{k > 2^j - M_2} \langle (1 - \cdot)^p \mid \phi_j, k \rangle_{L^2} \phi_{j,k}$$

pour $p = 0, \dots, N$ et où les sommes sont prises les k tels que le support des fonctions $\phi_{j,k}$ intersecte $[0, 1]$. On définit alors que V_j comme étant le sous-espace engendré par ces fonctions. Il suffit alors d'orthonormaliser pour obtenir une base orthonormée de V_j . On peut de plus montrer ([3]) qu'avec cette définition on a bien $V_j \subset V_{j+1}$. On trouvera de plus dans [4] la construction des ondelettes à partir de ces analyses multirésolutions et les démonstration démonstrations pour leurs propriétés de régularité qui sont similaires à celles des ondelettes de Daubechies sur \mathbb{R} . En particulier, en choisissant convenablement la fonction d'échelle de départ, on peut obtenir des bases d'ondelettes admettant un nombre arbitrairement élevé de moments nuls.

9 Application à la méthode de Galerkin

On considère le problème : trouver $u \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \forall x \in]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

où f est une fonction continue. On sait que trouver une solution à ce problème revient à résoudre le problème variationnel : trouver $u \in H_0^1(0, 1)$ telle que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(0, 1) \quad (19)$$

où $a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) + u(x)v(x) dx$ est une forme bilinéaire continue et coercive et $L(v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx$ est une forme linéaire continue. La méthode de Galerkin consiste alors à approximer la solution $u \in H_0^1$ de ce problème par une solution u_h d'un sous espace V_h de H_0^1 , de dimension finie, du problème

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (20)$$

Comme dans ce cas il s'agit d'un problème en dimension finie on peut se donner une base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ de V_h où N est la dimension de V_h . La solution s'écrit alors $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$ et le problème est alors équivalent à trouver des scalaires u_1, \dots, u_N tels que

$$\sum_{i=1}^N u_i a(\phi_i, \phi_j) = L(\phi_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (21)$$

On note alors A la matrice des $(a(\phi_i, \phi_j))_{1 \leq i, j \leq N}$, $U = (u_1, \dots, u_N)^\top$ et $F = (L(\phi_1), \dots, L(\phi_N))^\top$. Le problème (20) revient donc à résoudre le système linéaire

$$AU = F. \quad (22)$$

Définition 9.1. On définit le conditionnement d'une matrice inversible A comme étant le réel

$$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

□

Remarque 9.1. Le conditionnement d'une matrice inversible A s'interprète comme la sensibilité de la solution du système linéaire $AX = F$ aux perturbations de F . Il s'agit d'un réel supérieur à 1 et les valeurs les plus proches de 1 sont associées à une plus grande stabilité de la solution.

Le sous-espace V_h le plus classique est le sous-espace des éléments finis et la matrice A qui résulte de ce choix admet un conditionnement en $\mathcal{O}(h^{-2})$ où h désigne le pas de la discrétisation de l'espace des éléments finis. Nous allons à présent montrer qu'en utilisant le sous-espace V_J d'une analyse multirésolution r -régulière pour $r \geq 1$, la matrice A admet un conditionnement borné indépendamment de J . On aura besoin du théorème suivant démontré dans [13]¹.

Théorème 9.1. Soit $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ une base d'ondelette issue d'une analyse multirésolution r -régulière. Alors une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ appartient à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ pour $0 \leq s < r$ si, et seulement si,

$$\sum_{j \geq 0} 4^{js} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f | \psi_{j,k} \rangle_{L^2}|^2 < \infty.$$

De plus lorsque c'est le cas la norme

$$f \mapsto \|P_{V_0}(f)\|_{L^2} + \left(\sum_{j \geq 0} 4^{js} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f | \psi_{j,k} \rangle_{L^2}|^2 \right)^{1/2}$$

est équivalente à la norme usuelle des espaces de Sobolev.

Meyer démontre le théorème précédent dans le cas des espaces de Sobolev définis sur \mathbb{R} , nous allons cependant supposer que nous disposons d'une famille orthonormée $(\phi_{0,k})_{0 \leq k \leq K}$ engendrant une analyse multirésolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et une base d'ondelette $(\psi_{j,k})_{j \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq K}$ correspondante, que l'on suppose suffisamment régulière pour vérifier un résultat analogue au théorème 9.1. On pourra trouver un début de justification de ses hypothèses dans [10].

On revient à présent à la méthode de Galerkin. Pour obtenir des espaces de dimension finie fixe une borne inférieure à l'analyse multirésolution que l'on fixe par convention à V_0 et pour simplifier on note $\psi_{-1,k} = \psi_{0,k}$. On va réaliser l'approximation dans l'espace V_{J+1} qui admet $(\psi_{j,k})_{-1 \leq j \leq J, 0 \leq k \leq N}$ pour base. Soit $V = (c_{-1,0}, \dots, c_{J,N})^\top$. On pose $g = \sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{j,k}$. On a alors $g \in V_J$ et d'après le théorème 9.1 on a aussi $g \in H^1$ et

$$M_1 \sum_{j,k} 4^j |c_k|^2 \leq \|g\|_{H^1}^2 \leq M_2 \sum_{j,k} 4^j |c_k|^2. \quad (23)$$

De plus on a $V^\top AV = a(g, g)$ et comme a est une forme bilinéaire continue et coercive on a aussi

$$0 < C_1 \|g\|_{H^1}^2 \leq \|g\|_{H^1}^2 \leq C_2 \|g\|_{H^1}^2. \quad (24)$$

On introduit alors la matrice diagonale D de taille $(J+1) \times (N+1)$ donnée par $D_{(j,k);(j',k')} = 2^j \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}$. On peut alors combiner les encadrements (23) et (24) on obtient que

$$M_1 C_1 \|V\|_2^2 \leq V^\top D^{-1} A D^{-1} V \leq M_2 C_2 \|V\|_2^2. \quad (25)$$

On en déduit finalement que le conditionnement de la matrice $D^{-1} A D^{-1}$ est borné par

$$K(D^{-1} A D^{-1}) \leq \frac{M_2 C_2}{M_1 C_1}.$$

1. Il s'agit un premier exemple d'usage des ondelettes pour caractériser un espace fonctionnel, il existe des résultats semblables pour beaucoup des espaces fonctionnels classiques, on en trouvera un certain nombre dans [13]

Références

- [1] A. COHEN, *Ondelettes, analyses multirésolutions et filtres miroirs en quadrature*, Annales de l'I.H.P., (1990).
- [2] ———, *Wavelets and Multiscale Signal Processing*, Chapman & Hall, 1995.
- [3] ———, *Numerical Analysis of Wavelet Methods*, North-Holland, 2003.
- [4] A. COHEN, I. DAUBECHIES, AND P. VIAL, *Wavelets on the interval and fast wavelet transforms*, Appl. Comput. Harmon. Anal., (1993).
- [5] I. DAUBECHIES, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Commun. Pure Appl. Math, (1988).
- [6] A. HAAR, *Zur theorie der orthogonalen funktionen-systeme*, Math. Ann., (1911).
- [7] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vol. 1, Springer, 2 ed., 1990.
- [8] Y. KATZNELSON, *An introduction to harmonic analysis*, Dover, 1976.
- [9] S. MALLAT, *Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$* , Trans. Amer. Math. Soc., (1989).
- [10] ———, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Elsevier Science, 2008.
- [11] P. MALLIAVIN, *Integration and Probability*, Springer, 1995.
- [12] Y. MEYER, *Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs*, Séminaire Bourbaki, (1987).
- [13] ———, *Ondelettes et Opérateurs*, vol. 1, Hermann, 1990.
- [14] J. MORLET AND A. GROSSMANN, *Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape*, SIAM J. Math. Anal., (1984).
- [15] J. PEETRE, *New Thoughts on Besov Spaces*, Duke University Mathematics Series, 1976.